

Erzeugende Koordinaten und die Random-Phase Approximation

JÖRG HADERMANN

Institut für Theoretische Kernphysik der Universität Bonn

(Z. Naturforsch. **28 a**, 383–386 [1973]; eingegangen am 29. November 1972)

Herrn Professor K. BLEULER zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

Generator Coordinates and Random-Phase-Approximation

The method of generator coordinates is applied to a two level model with pairing and monopole force. The harmonic approximation is investigated. By proper inclusion of the symmetries of the Hamiltonian an improvement over the usual Random-Phase approximation results.

I. Einleitung

In den letzten Jahren sind in der Beschreibung der Kerne große Fortschritte erzielt worden. Dies beruht einerseits auf einem besseren Verständnis der Kernkräfte (siehe z. B. Ref.¹), zum andern auf neuen Methoden in der Behandlung des kernphysikalischen Vielkörperproblems. Aufbauend auf der Arbeit von BLOCH und HOROWITZ² ist es gelungen, eine Begründung des Schalenmodells zu geben (siehe z. B. Ref.³) und ihre Grenzen abzuschätzen⁴. Kollektive angeregte Zustände werden in diesem Rahmen durch Random-Phase-ähnliche Näherungen beschrieben. Ein exakt lösbares Modell erlaubt eine Abschätzung der Güte und einen Vergleich einzelner Näherungen.

Es hat sich gezeigt, daß die Methode der erzeugenden Koordinaten⁵ (EK) ein brauchbares Mittel ist, näherungsweise Grundzustandskorrelationen und angeregte Zustände in einem sehr einfachen Modell zu beschreiben^{6, 7}. Der Zweck dieser Arbeit ist, die Methode der EK in einem etwas verallgemeinerten Modell zu untersuchen und mit den üblichen Näherungsverfahren zu vergleichen.

In Abschnitt II wird das Modell angegeben und das Eigenwertproblem in den EK formuliert, in Abschnitt III eine RPA-ähnliche Näherung diskutiert.

II. Das Modell

Das hier untersuchte Zweischalenmodell ist zuerst von SCHÜTTE und BLEULER⁸ und AGASSI⁹ angegeben worden.

Der Hamilton-Operator¹⁰

$$H = (\tau_0 - \frac{1}{2} N_{\text{op}}) + H_P + H_M \quad (1)$$

Sonderdruckanforderungen an Dr. J. HADERMANN, Institut für Theoretische Kernphysik, D-5300 Bonn, Nußallee 16.

enthält einen kurzreichweiten Paarkraftterm

$$H_P = G(A_+^+ + A_-^+) (A_+ + A_-) \quad (1a)$$

und einen langreichweiten Monopolkraftterm

$$H_M = \frac{1}{2} V(\tau_+ + \tau_-)^2 - \frac{1}{2} V N_{\text{op}}. \quad (1b)$$

Hierbei sind die Operatoren

$$A_{\pm} = \sum_m \frac{1}{2} (-)^m a_{m, \pm 1} a_{-m, \pm 1},$$

$$\tau_+ = \sum_m a_{m, 1}^+ a_{m, -1}, \quad \tau_- = \tau_+^+$$

durch die Einteilchenerzeugungs- und -vernichtungsoperatoren

$$a_{m, \pm 1}^+, \quad \text{bzw.} \quad a_{m, \pm 1}$$

gegeben. Mit Hilfe der EK läßt sich die Schrödinger-Gleichung im Fock-Raum

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (2)$$

in eine Eigenwertgleichung im EK-Raum umschreiben

$$\mathcal{L} G = E G \quad (3)$$

wobei \mathcal{L} ein linearer Differentialoperator und G eine Funktion der EK ist.

Der wesentliche Schritt dieser Umformung liegt in der Existenz eines \mathcal{L} derart, daß

$$\mathcal{L} \langle \Phi | = \langle \Phi | H \quad (4)$$

für einen geeignet gewählten Zustand $\langle \Phi |$.

Der Einfachheit halber wählen wir die Teilchenanzahl N gleich der Degeneration der beiden Schalen 2Ω . Der Hartree-Fock-Grundzustand $|0\rangle$ ist dann für $NV < 1$ gegeben durch

$$|0\rangle = (A_+^+)^{\Omega} |0\rangle \quad (5)$$

und der kollektive Unterraum des Hilbert-Raumes durch die Zustände

$$|kl\rangle = (\tau_-)^k (A_-^{\pm})^l |0\rangle.$$



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Es genügt aus diesem Grunde zwei EK einzuführen und wir definieren

$$\langle \Phi(z_1, z_2) | = \langle \langle 0 | \exp\{z_1 \tau_+ + z_2 A_+^\dagger A_- \}. \quad (6)$$

Der Ansatz (6) berücksichtigt optimal die Symmetrie des Hamilton-Operators und hat feste Teilchenanzahl. Der Preis, der dafür bezahlt wird, ist ein bilineares Operatorprodukt im Exponenten, was zur Folge hat, daß der Operator \mathcal{L} von 4. Ordnung¹¹ ist. Eine langwierige aber einfache Rechnung ergibt

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, z_1, z_2\right). \quad (7)$$

Da Gl. (3) natürlich keineswegs einfacher zu lösen ist als das ursprüngliche Problem, wollen wir hier nicht auf die explizite Form von (7) eingehen, sondern – im folgenden Abschnitt – eine Näherungslösung betrachten.

III. Näherungen und Diskussion

Schon vor längerer Zeit haben JANCOVICI und SCHIFF¹² gezeigt, daß der Ansatz

$$\langle \Phi(z_{ik}) | = \langle \langle 0 | \exp\{\Sigma z_{ik} a_k^+ a_i\} \quad (6a)$$

in Gauss'scher Approximation⁵ auf RPA führt. Erweiterungen¹³ dieser Näherung führen auf eine Bosonen-Entwicklung. Eine besonders einfache Approximation⁶ erhält man, wenn im Ansatz für den Zustand $\langle \Phi |$ die Symmetrie des Hamilton-Operators berücksichtigt wird, Gl. (6), und die Eigenwertgleichung (3) in harmonischer Näherung gelöst wird. Die Lösungen haben RPA-Struktur, bringen jedoch eine Verbesserung gegenüber der Gauss'schen Approximation mit dem Ansatz von Gleichung (6a). Die Struktur der Hartree-Bogoliubov¹⁴ und HB-RPA¹⁵ Lösungen sind in dem hier betrachteten Modell untersucht worden, der Einfachheit halber wollen wir jedoch vom HF-Grundzustand $|0\rangle\rangle$ ausgehen. Dies hat zur Folge, daß vernünftige Resultate nur im Bereich

$$V\Omega < \frac{1}{4}, \quad G\Omega < \frac{1}{2} \quad (8)$$

erwartet werden können¹⁶.

In harmonischer Approximation erhält man für den Differentialoperator

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{V}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \{V(1 - 2\Omega) + G + 1\} z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \\ & - 2\{G(1 - \Omega) + V + 1\} z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + G \frac{\partial}{\partial z_2} \quad (9) \\ & + \Omega\{G + V(2\Omega - 1)\} z_1^2 - \Omega(V - G\Omega) z_2 + G\Omega. \end{aligned}$$

Die Eigenwertgleichung (3) separiert, und die Eigenwerte lassen sich leicht angeben:

$$E_{nm} = E_0 - n\omega - m\alpha \quad (10)$$

mit

$$\begin{aligned} E_0 = & \frac{1}{2} \{V(1 - 2\Omega) + G + 1 - \omega\} \\ & - \frac{1}{\alpha} G\Omega(V - G\Omega) + G\Omega, \\ \omega = & [\{V(1 - 2\Omega) + G + 1\}^2 \\ & - 2V\Omega\{G + V(2\Omega - 1)\}]^{1/2}, \\ a = & 2\{G(1 - \Omega) + V + 1\}. \end{aligned}$$

Man sieht folgendes:

1. Das Spektrum besteht aus Monopolvibrationen der Frequenz ω und Paarungsvibrationen der Frequenz α .

2. Die Gleichung $\omega = 0$ definiert ein $V_0(G)$. Für $V > V_0(G)$ bricht die Näherung zusammen. Für $G \ll 1$ ist $V_0(G)$ nur sehr schwach von G abhängig.

In den Fig. 1 und 2 wird für zwei Werte von V ein Vergleich mit den exakten Werten gemacht. Die Energiedifferenzen (Fig. 1) werden im Parameterbereich (8) qualitativ wiedergegeben. Bei der Paarung ist die Übereinstimmung befriedigend. Für

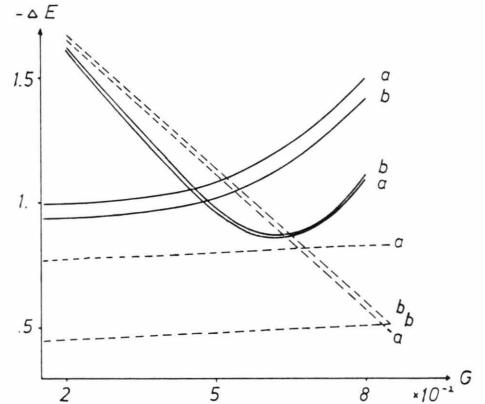


Fig. 1. Anregungsenergien für Teilchenanzahl $N=20$. Durchgezogene Linien: exakte Resultate; gestrichelte Linien: harmonische Näherung; a: $V=0.011$; b: $V=0.021$. In der Näherung sind die Monopolvibrationen nur schwach von G abhängig, während die Anregungsenergien für die Paarvibrationen einen linearen Abfall zeigen.

$V=.021$ ist eine große Diskrepanz zwischen exaktem Resultat und Monopolvibration zu beobachten. Dies ist ein Ausdruck dafür, daß für solch große Werte von V die Paritätsmischung wichtig wird, d.h. der tiefste Hartree-Fock-Zustand ist nicht mehr durch Gl. (5) gegeben, sondern durch eine Mischung der beiden Niveaus des Zweischalenmodells (Parität-

tätsdeformation). Die Grundzustandskorrelationen (Fig. 2) werden sehr gut wiedergegeben. Abweichungen vom exakten Resultat machen sich erst für $G > .05$ bemerkbar, wenn (wie auch in Fig. 2 sichtbar) der Grundzustand supraleitend wird.

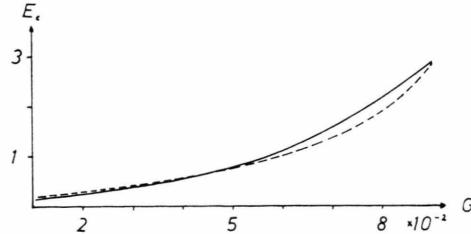


Fig. 2. Korrelationsenergie des Grundzustandes für $V = 0.021$. Durchgezogene Linie: exaktes Resultat; gestrichelte Linie: „RPA“-Näherung. Für $V = 0.011$ ergeben sich im wesentlichen die gleichen Resultate.

Zum Schluß wollen wir die hier untersuchte harmonische Näherung mit RPA und Higher RPA vergleichen. Die beiden Approximationen sind definiert durch

$$[H, Q] = E Q. \quad (11)$$

In RPA ist der Operator Q gegeben durch

$$Q = x_1 A_+ + x_2 A_-^+ + x_3 \tau_- - y_1 A_+^+ - y_2 A_- - y_3 \tau_+ \quad (12)$$

und HRPA definieren wir durch

$$Q = x_1 \tau_- + x_2 A_-^+ A_+ - y_1 \tau_+ - y_2 A_+^+ A_-. \quad (13)$$

Tab. 1. Anregungsenergien für Paarungsvibrationen E_1 und Monopolvibrationen E_2 im Vergleich verschiedener Näherungen (siehe Kap. III).

	E_1	E_2
EK	$-2\{1+V-G(\Omega-1)\}$	$-\sqrt{1+G-V(2\Omega-1)}^2-2V\Omega\{G+V(2\Omega-1)\}$
HRPA	$-2\{1+V-G(\Omega-1)\}$	$-\sqrt{1+G-V(2\Omega-1)}^2-\{G+V(2\Omega-1)\}^2$
HTD	$-2\{1+V-G(\Omega-1)\}$	$-\{1+G-V(2\Omega-1)\}$
RPA	$-1+G-\sqrt{(1-G)^2-(G\Omega+V)^2+G(\Omega-2)(G\Omega-2)}$	$-\sqrt{1+2G-2V(2\Omega-1)(2G+1)}$
TD	$-2(1-\frac{1}{2}G\Omega)$	$-\{1+G-V(2\Omega-1)\}$

Tab. 2. Definitionsbereich der Näherungen. Im angegebenen Parameterbereich existieren reelle Anregungsenergien.

	E_1	E_2
EK	—	$1+2G > 2V(2\Omega-1)(2G+1)-V(2\Omega-1)(2G-V)-G^2$
HRPA	—	$1+2G > 2V(2\Omega-1)(2G+1)$
HTD	—	—
RPA	$G \lesssim \frac{1-V^2}{2(2\Omega-1+V\Omega)}$	$1+2G > 2V(2\Omega-1)(2G+1)$
TD	—	—

Im ersten Fall hat der angeregte Zustand keine feste Teilchenanzahl, was bei der Lösung von Gl. (11) auf einen spurious state führt. Der Ansatz (13) ist völlig äquivalent der Definition des Zustandes (6).

In Tab. 1 sind die so erhaltenen Energien zusätzlich mit den entsprechenden Werten für die Tamm-Danoff-Näherung verglichen. Zur besseren Übersicht sind in Tab. 2 die Geltungsbereiche der einzelnen Näherungen zusammengestellt. Man bemerkt, daß RPA weit früher als in dem durch (8) definierten Bereich zusammenbricht, in unserem speziellen Beispiel schon für $G \gtrsim .026$. Alle Näherungen liefern in unterster Ordnung in G und V das Resultat der ersten Ordnung Störungsrechnung, ausgenommen RPA und TD, für die gilt

$$E_1^{\text{RPA}} = E_1^{\text{TD}} = -2\{1-\frac{1}{2}G\Omega\}. \quad (14)$$

Die Korrelationsenergie des Grundzustandes wird durch Gl. (11) nicht gegeben.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die harmonische Näherung im Rahmen der erzeugenden Koordinaten gute Resultate liefert, wenn nur die Symmetrie des Hamilton-Operators im Ansatz berücksichtigt wird. Sehr gut wird die Grundzustandsenergie wiedergegeben; ein Ergebnis, das sich schon in einer früheren Arbeit⁶ zeigte. Der Gültigkeitsbereich der Näherung kann ausgedehnt werden, wenn die angeregten Zustände nicht auf dem HF-Grundzustand, sondern auf dem Hartree-Bogoliubov-Grundzustand aufgebaut werden.

Herrn Prof. K. BLEULER danke ich für sein Interesse an dieser Arbeit. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. D. SCHÜTTE für viele Diskussionen. Freie Computerzeit am Rechenzentrum der Universität Bonn wird dankbar

- ¹ H. A. BETHE, Ann. Rev. Nucl. Sci. **21**, 93 [1971].
- ² C. BLOCH and J. HOROWITZ, Nucl. Phys. **8**, 91 [1958].
- ³ M. B. JOHNSON and M. BARANGER, Ann. Phys. New York **62**, 172 [1972].
- ⁴ T. H. SCHUCAN and H. A. WEIDENMÜLLER, Ann. Phys. New York **73**, 108 [1972].
- ⁵ D. M. BRINK and A. WEIGUNY, Nucl. Phys. **A 120**, 59 [1968].
- ⁶ J. HADERMANN, Nucl. Phys. **A 175**, 641 [1971].
- ⁷ A. J. ALVES and E. M. SILVA, Nucl. Phys. **A 181**, 669 [1972].
- ⁸ D. SCHÜTTE and K. BLEULER, Nucl. Phys. **A 119**, 221 [1968].
- ⁹ D. AGASSI, Nucl. Phys. **A 116**, 49 [1968].
- ¹⁰ Für die Definition der Operatoren siehe Ref. ⁸, deren Notation hier und im folgenden gebraucht wird.

anerkannt. Diese Arbeit wurde unterstützt durch Mittel des Landesamtes für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen.

- ¹¹ Bei der Definition $\langle \Phi | = \ll 0 \| \exp(z_1 \tau_+ + z_2 A_+ + z_3 A_-)$ ist zwar die Symmetrie optimal berücksichtigt und \mathcal{L} von 2. Ordnung, aber der Zustand hat keine feste Teilchenanzahl.
- ¹² B. JANCOVICI and D. H. SCHIFF, Nucl. Phys. **58**, 678 [1964].
- ¹³ J. DA PROVIDENCIA et al., Nucl. Phys. **A 170**, 129 [1971].
- ¹⁴ K. BLEULER, A. FRIEDERICH, and D. SCHÜTTE, Nucl. Phys. **A 126**, 628 [1969].
- ¹⁵ K. BLEULER, W. GERLING, and D. SCHÜTTE, unpubliziert, Bonn 1969.
- ¹⁶ Es hat sich gezeigt, daß die in Ref. ⁶ angegebene symmetrisch-mischende Approximation auf ein nichtlineares Gleichungssystem führt. Seine Lösungen ergeben einmal die in diesem Abschnitt angegebene Näherung und zum andern Energien, die in den Parametern V und G äußerst unstetig sind.

Coordinate-Independent Green's Functions for the Chiral-Invariant Pion Model

K. MEETZ

Physikalisches Institut der Universität Bonn

(Z. Naturforsch. **28 a**, 386—393 [1973]; eingegangen am 19. Oktober 1972)

To KONRAD BLEULER on the occasion of his 60th birthday

A coordinate-independent formulation of the chiral-symmetric pion theory is developed using a dreibein field which introduces a redundant gauge field into the field equations. There is a particular gauge, where the field variables transform linearly under chiral transformations and the field equations reduce to those of the Sugawara-model. Quantization of Sugawara's field equations is obtained in terms of Green's functions. The field equations for the coordinate-independent Green's functions are translated into equations for coordinate Green's functions by introduction of the coordinates as auxiliary variables. The latter field equations incorporate the additional Feynman graphs discovered before.

I. Introduction

The success of the chiral-invariant nonlinear pion model in the tree approximation has motivated a number of authors to study the perturbation theory of this model in general. Two major obstacles have to be overcome, before the perturbation series can be given a well defined meaning. The more severe one arises from the fact that the Lagrangian is of the nonpolynomial type and, therefore, nonrenormalizable. Recently, some progress in the study of nonpolynomial Lagrangians has been made by the use of superpropagators. In context with chiral-invariant pion Lagrangians superpropagators have been discussed by LEHMANN and TRUTE¹ and KRAUSE and SCHEUNERT². The superpropagator method requires localizability. LEHMANN and

TRUTE¹ have shown that this condition determines the pion field coordinates uniquely. Here the second difficulty, we have mentioned, shows up. The perturbation series should, of course, be independent of the choice of coordinates and moreover, it should be chiral-invariant.

In the following we develop a formulation of the chiral-symmetric pion theory which is independent of the coordinates, while the chiral transformations are reduced to linear transformations of the field variables. The problem to find a coordinate-independent representation is quite similar to that of giving a gauge-independent formulation of electrodynamics. All we have to do, is to introduce a dreibein field and to take components of the field variables with respect to it. In Section II we show that the field equations for the pion coordinates are transformed